Vektorgeometrie ganz einfach

Teil 5

Skalarprodukt

Anwendung auf die
Berechnung von
einfachen Abständen und Winkeln
sowie Normalenvektor

Ganz einfache Erklärung der Grundlagen:

Die wichtigsten Aufgabenstellungen und Methoden-

Datei Nr. 64100

Stand 5. April 2014

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort !!!

Dieser Text zeigt die Einführung des Skalarprodukts.

Damit erhält man Berechnungsmöglichkeiten wie die Berechnung von Streckenlängen und von Winkeln. Vor allem für orthogonale Vektoren (auf einander senkrecht stehende Pfeile) spielt das Skalarprodukt eine wichtige Rolle. Man kann damit dann Normalenvektoren zu einer Ebene berechnen und damit deren Koordinatengleichung (=Normalengleichung) rasch aufstellen. Kompliziertere Abstandsberechnungen folgen im Text 64110

Im Text 54101 findet man die wichtigsten Beispiele und alle Trainingsaufgaben dieses Textes (nur mit Ergebnissen) kurz zusammengestellt.

Hinweis zur Berechnung von Längen:

Ich lasse die Ergebnisse stets exakt (als Wurzel) stehen, Näherungswerte kann jeder selbst dazu berechnen. Die meisten Lehrer verlangen hinter der berechneten Maßzahl die Maßeinheit LE, was Längeneinheit bedeuten soll. Auch dies lasse ich hier konsequent weg.
Doch folgender Hinweis sein erlaubt. Folgende Schreibweise ist <u>inkorrekt:</u>

$$a = \left|\overline{CB}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\-2\\-6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41}\ \ LE$$

Warum? Die Längeneinheit muss überall stehen, wo eine Berechnung ausgeführt worden ist, also so:

$$a = \left|\overline{CB}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\-2\\-6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+4+36}\ LE = \sqrt{41}\ \ LE$$

Und bei längeren Rechnungen ist das oft mühsam. Daher bietet sich folgendes an:

$$a = \left|\overline{CB}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\-2\\-6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+4+36} = \sqrt{41}\ \ (LE)$$

Wenn die **Maßeinheit** in Klammern steht, ist sie nur der Hinweis darauf, dass überall die Einheit LE gemeint ist. Dann kann man darauf verzichten, hinter jedes Ergebnis LE zu schreiben.
Das wäre übrigens falsch:

$$a = \left|\overline{CB}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\-2\\-6\end{pmatrix}\right| LE = \sqrt{1+4+36}\ LE = \sqrt{41}\ \ LE$$

Der Betrag des Vektors ist noch kein Ergebnis sondern der „Befehl": Berechne davon den Betrag.

Inhalt

Fortsetzung im Text 64110

1 Kann man Vektoren miteinander multiplizieren?

1.1 Die „Multiplikation von Vektoren" heißt nur so – es hat mit der Multiplikation von Zahlen kaum etwas zu tun, es ist etwas ganz anderes!

Beim Einstieg in die Vektorrechnung lernt man, wie man **Vektoren addiert** und wie man **Vielfache von Vektoren** bildet (also Zahlen mit Vektoren multipliziert). Das Ergebnis dieser Berechnungen sind wieder Vektoren. Wenn man eine „**Multiplikation“ von Vektoren** einführt (definiert), tut man das, weil man es für irgendeine Anwendung benötigt!! Die zugehörige Rechenvorschrift orientiert sich dann am Ziel, das man damit erreichen will. Es ist also nicht so, dass man sagen kann: Das hier … ist <u>die</u> Vektormultiplikation. Es gibt sogar mehrere Rechenarten, die man Vektormultiplikation nennen könnte. Wenn man Schüler um einen Vorschlag bittet, wie man eine Multiplikation von zwei Vektoren definieren könnte, kommt sehr oft dieses Angebot:

a) Aus $\vec a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ***könnte*** man einen „**Produktvektor“** wie folgt ***definieren***:

$$\vec a \otimes \vec b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 \\ 1\cdot(-2) \\ (-4)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Doch diese Art „Produkt“ hat jedoch **keine Anwendungsmöglichkeit**, es ist eine Berechnung ohne Sinn und Zweck. **Man kann es zwar „Produkt“ nennen, doch niemand benötigt es.**

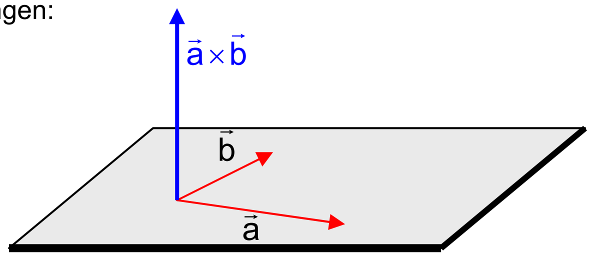
b) Eine andere Vektormultiplikation hat sich dagegen durchgesetzt, man nennt das Ergebnis dann **Vektorprodukt** oder auch **Kreuzprodukt.** Die Definition dazu ist jedoch unglaublich kompliziert. Ich zeige sie hier nur andeutungsweise:

Aus $\vec a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ kann man berechnen: $\vec a \times \vec b = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$.

Dieses Kreuzprodukt hat zwei wichtige Anwendungen:

Eigenschaften des Vektorprodukts.

1. Der Vektor $\vec a \times \vec b$ steht senkrecht auf $\vec a$ und senkrecht auf $\vec b$.
2. Seine Länge (Betrag) ist genau so groß wie der Inhalt des von $\vec a$ und $\vec b$ aufgespannten Parallelogramms.



Damit lässt sich viel anfangen. Mehr dazu, und wie man seine Koordinaten trickreich schnell berechnen kann, steht im Text 63200 auf Seite 24.

c) Sehr wichtig ist auch das sogenannte **Skalarprodukt zweier Vektoren**, das diesen seltsamen Namen trägt, weil das Ergebnis kein Vektor, sondern eine Zahl ist.
Und „Skalar“ bedeutet so viel wie „kein Vektor“.

1.2 Definition und Recheneigenschaften des Skalarprodukts.

<u>Definition</u>: Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Dann sei $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}$ (1)

Daraus folgt auch: $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (2)

$\vec{a} \cdot \vec{a}$ kürzt man als $\vec{a}^2$ ab: $\boxed{\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (2')

Zahlenbeispiele: (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 4 - 2 + 15 = 17$, (b) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 - 2 + 15 = 17$

(c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 4 + 9 + 36 = 49$ (d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$ (e) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = 12 - 20 + 8 = 0$

Einige Rechengesetze des Skalarprodukts

(1) Es gilt das Kommutativgesetz: $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}}$

Die Beispiele (a) und (b) lassen erkennen, dass man die <u>Faktoren vertauschen darf</u>.

(2) Das Skalarprodukt ist 0, wenn man mit dem Nullvektor multipliziert. Siehe Beispiel d).

(3) Man darf Zahlenfaktoren „ausklammern“: $\boxed{(r\vec{a}) \cdot (s\vec{b}) = rs \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})}$ **Beispiel:**

Es sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, dann folgt $4\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $3\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$ Dann gilt $(4\vec{a}) \cdot (3\vec{b}) = 12 \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

Beweis: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 5 - 3 = 8$ und $(4\vec{a}) \cdot (3\vec{b}) = 12 \cdot 6 + 4 \cdot 15 - 4 \cdot 9 = 96$

(5) Wichtig ist das Distributivgesetz, wonach man Klammern mit Summen ausmultiplieren darf:

$$\boxed{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}}$$

Beispiel: Es seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Berechnung der linken Seite: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 + 3 - 9 = 3$

Berechnung der rechten Seite:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = [6 + 5 - 3] + [3 - 2 - 6] = 8 + (-5) = 3$$